【 62 】

氏　　　名	Pyi Aye（ピー　エイ）
学位(専攻分野)	博　士（理　学）
学位記番号	理　博　第 1781 号
学位授与の日付	平成 9 年 3 月 24 日
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 項該当
研究科・専攻	理学研究科数学・数理解析専攻
学位論文題目	On the compressible Bénard problem (圧縮性 Bénard 問題について)
論文調査委員	(主　査) 教　授　西田孝明　　教　授　渡辺信三　　教　授　岩崎敷久

論文内容の要旨

水平な容器に入れられた液体を下から一様に加熱した時の液体の運動は，Bénard の実験以来物理・数学の研究対象とされてきた。上面と下面での温度差が小さい時は，熱は熱伝導のみで伝わり流体運動はない。これが熱伝導解であり，この解は上下の温度差がいくらあっても数学的には存在している。しかしながら温度差が一定値に達すると，この熱伝導解は不安定になり，熱対流が起こる。この熱対流は，はじめはロール型のパターンあるいは上から見ると六角形のパターンをした速度については定常解が観察される。この時流体は，熱対流によっても熱を伝えている。更に温度差が大きくなると周期的な振動をしたり，不規則なカオチックな運動になることも観測されている。これらの数学的取り扱いは，Rayleigh 以来，Boussinesq 方程式と言われる流体の厚さが薄いと考えた時の近似方程式で定式化されて説明されてきている。数学的に厳密に言えば，熱伝導解は，ある臨界温度差を越えると不安定化し，ロール型解あるいは六角形の解に分岐することまでが証明されている。それより温度差が上がった場合については実験による観察及び数値実験しか無い。

これらが Boussinesq 近似による数学的な結果であるが，流体の厚さが薄くない時，あるいは気体・大気の様に圧縮性が重要な場合には，流体の圧縮性を正当に考慮した定式化が必要になるが，方程式系が複雑になるためにごく最近まで数学的取り扱いは無かった。

当申請論文では，圧縮性・粘性・熱伝導性を一般的条件の下で考慮した Bénard 問題を考察している。流体が水平な上・下の平面に囲まれた領域を満たし，上・下の境界での速度の境界条件を自然な固定境界条件とした時の数学的定式化を行い，その無次元化した系を考察し，熱伝導解の安定性を調べた。無次元パラメーターのうち典型的な Rayleigh 数を用いてこれが小さい時に，熱伝導解の安定性を証明している。方法は，ソボレフ空間での極めて複雑巧妙なエネルギー不等式を見いだす事によって成功している。

更に，Rayleigh 数が大きくなった時の熱伝導解の不安定性を調べる基になる研究として，熱伝導解のまわりでの線形化方程式系の作用素のスペクトルを調べ，Rayleigh 数に依らずにセクトリアル性を持つ

ことを証明している。これによって作用素の固有値は，Rayleigh 数が変化しても，複素平面上で左に開いた楔形領域の内部にしかないことがわかる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

Bénard 問題は，流体の厚みが薄いと考えた近似である Boussinesq 方程式による研究が多くなされてきたが，流体が薄くなかったり，大気の運動・天気予測の場合の様に圧縮性の考慮が必要な場合には一般の圧縮性・粘性・熱伝導性を考慮した方程式系をそのまま取り扱わなければならない。そのために，熱伝導解のまわりでの線形化方程式系でさえ複雑で，数学的な取り扱いは，ごく最近の Padula 等の研究まで無かった。無次元化のパラメーターも Rayleigh 数，Prandtl 数の他にポリトロピック指数や流体の厚さに当たるパラメーターが入ってくる。Padula 等の研究は，上・下の二平面での速度の境界条件を，slip 境界とした場合を扱い，エネルギー法によって熱伝導解の安定性を証明したものである。しかしながら物理的には速度について固定境界条件が自然である。しかも数学的取り扱いは困難になる。そこで当申請論文は，この固定境界条件を取り上げ，熱伝導解の安定性をソボレフ空間 H^1 及び H^2 においてエネルギー不等式によって証明した。この「エネルギー」は，系に対応して数学的に構成したものであって系が放物型・双曲型の混合型であるために大きな工夫が必要であった。これによって Rayleigh 数が大きくない時の熱伝導解の安定性が証明できたのみならず，H^2 でのエネルギーも得られたために解の存在証明に進む手掛かりも得られている。更に Rayleigh 数を大きくしていった時の熱伝導解の不安定性そして分岐現象の説明に研究を進める始めとして，熱伝導解のまわりでの線形化した方程式系が，作用素としてセクトリアル性を持つことを証明している。これによって系のスペクトルが Rayleigh 数によらずに複素平面上の左に開いた楔形領域の中にあることがわかった。固有値・固有関数の Rayleigh 数等のパラメーターに依存した動きを追跡する基礎を作ったことになる。これに続いて参考論文では，精度保証付きの数値計算によって Rayleigh 数が臨界値を越える時，固有値が複素平面の原点を左から右に横切ることを示した。これは熱伝導解の不安定化を証明したものである。

以上本申請論文は，圧縮性・粘性・熱伝導性流体の熱対流問題の解析的研究の基礎を築いたものであって，博士（理学）の学位論文として十分に価値あるものと認められる。

なお，主論文に報告されている研究業績を中心とし，これに関連した研究分野について試問した結果，合格と認めた。